

מבוא להסתברות להנדסה מכנית

פרק 27 - המשטנה המקרי הבודד - שאלות מסכימות

תוכן העניינים

1. כללי

המשתנה המקרי הבודד – שאלות מסכימות:

שאלות:

1) נתון כי: $X \sim B\left(4, \frac{1}{2}\right)$, $Y \sim B\left(10, \frac{1}{4}\right)$.

א. חשבו את התוחלת וסטיית התקן של X .

ב. $4 - X = W$, חשבו את התוחלת וסטיית התקן של W .

ג. $Y - X = T$, חשבו את התוחלת של T .

האם ניתן לדעת מה סטיית התקן של T ?

2) ערן משחק בקזינו בשתי מכונות הימורים, בכל מכונה משחק אחד (במכונה א' ובמכונה ב'). הסיכוי שלו לניצח במשחק במכונה א' הינו 0.08 והסיכוי שלו לניצח רק במכונה א' הינו 0.05. הסיכוי שלו להפסיד בשני המשחקים ביום מסוים הוא 0.88.

א. מה הסיכוי שעrn ניצח בשני המשחקים?

ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הניצחונות של ערן?

ג. אם ערן נכנס לקזינו 5 פעמים ובכל פעם שיחק את שני המשחקים, מה ההסתברות שעrn ניצח בשני המשחקים בדיק פעם אחת מתוך חמישת הפעמים?

3) לאדם צורר מפתחות. לצורך 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסיה מפתח מסוים הוא מוציאו אותו מהצרור כדי לא להשתמש בו שוב. נסמן ב-X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של X.

ג. כל ניסיון לפתח הדלת אורך חצי דקה. מה התוחלת ומה השונות של הזמן הכלול לפתיחה הדלת?

4) מספר התקלות בשידור "ערוץ 1" מתפלג פואסונית בקצב של 6 התקלות ביום.

א. מה ההסתברות שביום מסוים הייתה לפחות תקלה אחת?

ב. מה ההסתברות בשבוע (7 ימי שידור) יהיה בדיק 6 ימים בהם לפחות תקלה אחת?

ג. מה תוחלת מספר הימים שייעברו מהיום ועד היום הראשון בו לפחות תהיה תקלה אחת?

- 5) בעל חנות גדולה בקניון שם לב ש-40% מהמטופרים בחנותו נרכשים עבור ילדים, 35% נרכשים עבור נשים ו-25% 25% נרכשים עבור גברים. 10% מהמטופרים הנרכשים עבור ילדים הם מתוצרת חוץ, וכך גם 60% מהמטופרים הנרכשים עבור נשים ו-50% מآلלה הנרכשים עבור גברים.
- מה ההסתברות למכור בחנות זו מוצר מתוצרת חוץ?
 - יהי X מספר המטופרים שיימכרו בחנות זו מפתוחתה ביום א' בבוקר, עד שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ (כולל).
מהי פונקציית ההסתברות של X ?
 - מהי תוחלת מס' המטופרים מתוצרת חוץ שיימכרו, עד שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ?
 - ביום ב' נמכרו בחנות 7 מטופרים. מה ההסתברות שבבדיקה 3 מהם הם מתוצרת חוץ?
- 6) חברת הפקות של סרטים הפיקה 3 סרטים, אשר הופקו לטלוויזיה המקומיית. חברת ההפקות מנסה למכור את הסרטים הללו לחו"ל.
להלן ההסתברויות למכירת הסרטים לחו"ל:
הסרט "הצבאי" יימכר לחו"ל בסיכון של 0.6.
הסרט "עלולם לא" יימכר לחו"ל בסיכון של 0.7.
הסרט "מוות פתאומי" יימכר לחו"ל בסיכון של 0.2.
ידעו כי כל סרט עלה להפקה חצי מיליון שקלים. כמו כן, כל סרט הביא להכנסה של 200,000 שקלים מטהלויזיה המקומית. במידה וסרט יימכר לחו"ל, כל סרט יימכר ב-600,000 שקלים.
- בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הסרטים שיימכרו לחו"ל.
 - מהי התוחלת והשונות של מספר הסרטים שיימכרו?
 - מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של הרווח (במאות אלפי שקלים) של חברת ההפקה?
- 7) במפעל מייצרים סוכריות כך ש-20% מהסוכריות בטעם תות. הייצור הוא ייצור המוני. שאר הסוכריות בטעמים שונים, השקיות נארזות ובכל שקיית בדיקון 5 סוכריות.
- נבחרה שקיית וננתן שבשquit פחות מ-3 סוכריות אדומות.
מה ההסתברות שבשquit סוכריה אדומה אחת?
 - בוחרים באקרים שקיית אחר שקיית, במטרה למצוא שקיית ללא סוכריות אדומות. מה ההסתברות שייאלצו לדגום יותר מ-6 שקיות?

8) מבחן בניי שני חלקים: בחלק א' 10 שאלות ובחלק ב' 10 שאלות. תלמיד התכוון רק לחלק א' של המבחן ובחלק זה בכל שאלה יש סיכוי של 0.8 שיוננה נכון, בחלק השני לכל שאלה יש 4 תשובות כשם אחת נכונה. בחלק זה הוא מוחש את התשובות.

- מיהי ההסתברות שבחלק הראשון הוא יענה נכון על 7 שאלות בבדיקה?
- מיהי ההסתברות שבחלק השני הוא יענה נכון על לפחות מ-3 שאלות?
- מה התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בחלק הראשון?
- מהי התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בבחינה כולה?

9) יהיו X משתנה מקרי המקיים: $E(X) = 2$ וכן: $V(X) = 1$.
חשבו: $E(X^2)$.

10) הסיכוי לעبور מבחן נהיגה הינו P . בוחרים באקראי ארבעה נבחנים. ההסתברות שניים מהם יעברו את מבחן הנהיגה גבוהה פי $\frac{8}{3}$ מהסיכוי שכל הארבעה יעברו את המבחן.

- חשבו את ערכו של P .
- תלמיד ניגש לבחינה עד אשר הוא עבר אותה. מה ההסתברות שיעבור את מבחן הנהיגה רק ב מבחן הרביעי?
- מה ההסתברות שיאlez לגשת לפחות לפחות לחמשה מבחןים בסך הכל?
- מה התוחלת ומהי השונות של מספר המבחנים שבהם יכשל?
- ידעו שהתלמיד ניגש לשולשה מבחנים ועודין לא עבר. מה ההסתברות שבסופו של דבר יעבור ב מבחן הנהיגה החמישי?

11) רובוט נמצא בנקודה 0 על ציר המספרים. הרובוט מבצע n צעדים ובכל צעד הוא נוע בסיכוי P . ימינה ביחידה אחת ובסיכוי $P-1$ שמאליה ביחידה אחת. נסמן ב- X את המספר עליו עומד הרובוט לאחר n צעדים. רשמו את פונקציית ההסתברות של X באמצעות P ו- n .

12) למטרע יש סיכוי P לקבל את התוצאה ראש. מטילים את המטרע. אם יוצא ראש בפעם הראשונה מפסידים שקל ומפסיקים את המשחק. אחרת, ממשיכים לזרוק וזוכים במספר שקלים לפי מספר הפעמים שהטלו את המטרע מההתחלת ועד שהתקבל ראש.

- בנו את פונקציית ההסתברות של רוח המשחק (באמצעות P).
- בטאו את תוחלת הרוח באמצעות P .
- לאלו ערכי P המשחק כדאי?

13) מطبع הוגן מוטל עד שמתקבל $1+m$ פעמים עז.
 רשמו את פונקציית ההסתברות של מספר הפעמים שהתקבל פלי.

14) נתונות N מגירות ממושפרות מ-1 ועד N . מתקיך n חולצות, יש לבחור באופן אקראי לכל חולצת מגירה. כל מגירה יכולה להכיל את כל cholczot.
 נגידר את X_1 - כמספר cholczot שהונחו בмагירה מס' 1.
 נגידר את X_N - כמספר cholczot שהונחו בмагירה מס' N.
 חשבו את: $V(X_1 + X_N)$.

15) n אנשים יושבים במסעדה. בזמן שמניע העת לשלים, האנשים פועלים לפי העיקנון הבא: כל אחד מהם מטיל מطبع הוגן עד אשר אחד מהם מקבל תוצאה שונה מכל השאר והוא זה שמשלם.
 מהי תוחלת מספר הסבבים שיבוצעו עד שימצא משלם?

16) הסיכוי לעبور בקורס מסוים את מועד א' הוא 0.7. סטודנט שנכשל במועד א' בהכרח ניגש למועד ב' ואז הסיכוי שלו לעبور אותו הוא 0.8. אם סטודנט נכשל במועד ב' הוא ניגש למועד מיוחד אחד ואחרון.
 נתון שלמדוуд א' נגשו כל 20 הסטודנטים הרשומים לקורס.
 מהי התפלגות מספר הבדיקות שייאלץ המרצה לחבר?

17) לקניון 3 כניסה שונות. בכל כניסה מספר האנשים שנכנסים לקניון מתפלג פואסונית באופן בלתי תלוי בכניסה אחרת. מספר האנשים שנכנסים בכניסה ה- i מתפלג פואסונית עם קצב של λ_i אנשים בשנית.
 יהיו Y מספר האנשים שנכנסים לקניון בשנית מכל הכניסות יחדיו.
 מצאו את: $E\left[\frac{1}{Y+1}\right]$.

18) לרני 20 טושים אותם הוא מכניס באקראי ל-3 קלמרים. לכל טוש נבחר קלמר באקראי ובאופן בלתי תלוי בטוש אחר. כל קלמר יכול להכיל עד 20 טושים.
 נסמן ב- X את מספר הקלמרים שיש בהם בדיק 10 טושים.
 חשבו את $E(\sqrt{x+7})$.

19) בשדרות רוטשילד החליטו לשתול n ברושים ו-2 אורנים אחד אחרי השני בשורה. סידור העצים בשורה נעשה באקראי. נגידר את X להיות מספר הברושים, בין הברוש הגבוה ביותר לברוש הנמוך ביותר שנשתלו.

א. מצאו את ההתפלגות של X .

ב. הוכיחו שהתוחלת של X היא $\frac{n-2}{3}$.

תשובות סופיות:

ב. תוחלת: 0, סטיית תקן: 2.

1) א. תוחלת: 2, סטיית תקן: 1.

ג. תוחלת: 4.5, סטיית תקן: לא ניתן.

ב. תוחלת: 0.15, שונות: 0.1875.

2) א. 0.03.

ג. 0.1328.

ב. תוחלת: 3, שונות: 2.

3) א. ראה טבלה:

5	4	3	2	1	x
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	$P(x)$

ג. תוחלת: 1.5, שונות: 0.5.

ג. 1.0025.

4) ב. 0.0172. א. 0.9975.

ד. 0.282. ג. 0.282.

5) ב. 0.6. א. 0.375.

ב. תוחלת: 1.5, שונות: 0.61.

6) א. ראה טבלה:

3	2	1	0	x
0.084	0.428	0.392	0.092	$P(x)$

ג. תוחלת: 0, סטיית תקן: 4.68.

7) ב. 0.0923. א. 0.4348.

ג. תוחלת: 8, שונות: 1.6.

8) ב. 0.5256. א. 2.013.

ד. תוחלת: 10.5, שונות: 3.475.

9) 10.

ג. 0.0256.

10) ב. 0.0384. א. 0.6.

ה. 0.24.

11) ד. תוחלת: 0.67, שונות: 1.11.

$$P(X=k) = \binom{n}{k+n} \cdot p^{\frac{k+n}{2}} \cdot (1-p)^{\frac{n-k}{2}} \quad (11)$$

$$\cdot \frac{1-2p^2}{p} \cdot \text{ב}$$

$$P(X=k) = \frac{P}{(1-P)^{k-1}} \cdot P k=2,3,\dots,\infty \quad (12)$$

$$0 < p < \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{ג}$$

$$\cdot P(X = k) = \binom{m+k}{m} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+m+1}, \quad k = 0, 1, \dots, \infty \quad (13)$$

$$\cdot n \cdot \left(\frac{2}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{N}\right) \quad (14)$$

$$\cdot \frac{2^n}{2n} \quad (15)$$

(16) ראו טבלה :

3	2	1	X
0.7099	0.2893	0.0008	P(X)

$$\cdot \frac{e^{-6}}{6} [e^6 - 1] \quad (17)$$

$$.2.675 \quad (18)$$

$$\text{ב. הוכחה.} \quad \cdot P(X = k) = \frac{n-k-1}{\binom{n}{2}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-2. \quad (19)$$